

平成30年度2学期中間考査（数II 2年）answer

2018-hi2-2term1answer.tex

2年 _____ コース

名前 _____

1. 次のような実数 x, y を求めよ。

$$(x+y) + (x+2)i = 0$$

x, y が実数であるから, $x+y, x+2$ は実数である。

$$\text{よって } x+y=0, x+2=0$$

$$\text{これを解いて } x=-2, y=2$$

2. 次の式を計算せよ。

$$\begin{aligned} (1) & (3-2i)(-2+i) \\ &= -6+3i+4i-2i^2 \\ &= -6+3i+4i-2(-1) \\ &= (-6+2)+(3+4)i \\ &= -4+7i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (1+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-8}) \\ &= (1+\sqrt{2}i)(3-2\sqrt{2}i) \\ &= 3-2\sqrt{2}i+3\sqrt{2}i-4i^2 \\ &= 1-2\sqrt{2}i+3\sqrt{2}i-4(-1) \\ &= (3+4)+(-2\sqrt{2}+3\sqrt{2})i \\ &= 7+\sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & (1-i)^3 \\ &= 1^3-3\cdot 1^2\cdot i+3\cdot 1\cdot i^2-i^3 \\ &= 1-3i+3(-1)-(-1)i \\ &= (1-3)+(-3+1)i \\ &= -2-2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) & \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \\ &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} \\ &= \frac{1-i}{1-i^2} + \frac{1+2i}{1-2i^2} \\ &= \frac{1-i}{2} + \frac{1+2i}{5} \\ &= \frac{5(1-i)+2(1+2i)}{10} \\ &= \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i \end{aligned}$$

3. 2次方程式 $x^2-4x+5=0$ の2つの解を α, β とするとき, 次の式の値を求めよ。

解と係数の関係から $\alpha+\beta=4, \alpha\beta=5$

$$\begin{aligned} (1) & \alpha^2+\beta^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= 4^2-2\cdot 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \alpha^3+\beta^3 \\ &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 4^3-3\cdot 5\cdot 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

4. 2次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$ が異なる2つの正の解をもつとき, 定数 m の値の範囲を求めよ。

この2次方程式の2つの解を α, β とし, 判別式を D とする。この2次方程式が, 異なる2つの正の解をもつのは, 次が成り立つときである。

$$D>0 \text{ で, } \alpha+\beta>0 \text{ かつ } \alpha\beta>0$$

$$\text{ここで } \frac{D}{4} = m^2-1\cdot(m+2) = m^2-m-2$$

$$D>0 \text{ より } m^2-m-2>0$$

$$\text{すなわち } (m+1)(m-2)>0$$

$$\text{よって } m<-1, 2<m \quad \cdots \textcircled{1}$$

解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2m, \alpha\beta=m+2$$

$\alpha+\beta>0$ より

$$-2m>0 \quad \text{よって } m<0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\alpha\beta>0$ より

$$m+2>0 \quad \text{よって } m>-2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③の共通範囲を求めて

$$-2<m<-1$$

5. 整式 $P(x) = x^3+ax^2+3x-2a$ を $x-2$ で割った余りが12であるとき, 定数 a の値を求めよ。

剰余の定理により $P(2)=12$ であるから

$$2^3+a\cdot 2^2+3\cdot 2-2a=12$$

整理すると $2a=-2$

$$\text{よって } a=-1$$

6. 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りが5, $x+2$ で割った余りが-1である。 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ。

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて, 商を $Q(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax+b$$

この等式より $P(1)=a+b, P(-2)=-2a+b$

また, $x-1$ で割った余りが 5 であるから

$$P(1)=5$$

$x+2$ で割った余りが -1 であるから

$$P(-2)=-1$$

$$\text{よって } a+b=5, -2a+b=-1$$

これを解くと $a=2, b=3$

したがって, 求める余りは $2x+3$

7. 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3 - 1 = 0$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

よって

$$x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2+x+1=0$$

$$\text{したがって} \quad x=1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

左辺を因数分解すると

$$(x^2-2)(x^2+1)=0$$

$$\text{よって} \quad x^2-2=0 \quad \text{または} \quad x^2+1=0$$

$$\text{したがって} \quad x = \pm\sqrt{2}, \pm i$$

(3) $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$

$$P(x) = x^3 - 4x + 8 \text{ とすると}$$

$$P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 8 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもち

$$P(x) = (x-2)(x^2-2x-4)$$

$$P(x) = 0 \text{ から}$$

$$x-2=0 \quad \text{または} \quad x^2-2x-4=0$$

$$\text{したがって} \quad x = 2, 1 \pm \sqrt{5}$$

8. a, b は実数とする。3 次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ が $1+2i$ を解にもつとき、定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

$1+2i$ が解であるから

$$(1+2i)^3 + a(1+2i) + b = 0$$

$$\text{整理して} \quad (a+b-11) + (2a-2)i = 0$$

a, b は実数であるから、 $a+b-11, 2a-2$ は実数である。

$$\text{よって} \quad a+b-11=0, 2a-2=0$$

$$\text{これを解くと} \quad a=1, b=10$$

$$\text{このとき、方程式は} \quad x^3 + x + 10 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x+2)(x^2-2x+5)=0$$

$$\text{したがって} \quad x = -2, 1 \pm 2i$$

$$\text{答} \quad a=1, b=10, \text{他の解は} \quad -2, 1-2i$$

9. a, b は 0 でない定数とし、2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解を α, β とする。 $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ を 2 つの解にもつ 2 次方程式の 1 つが、 $x^2 + bx + 2a = 0$ であるとき、 a, b の値を求めよ。

2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ について、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b \quad \cdots \textcircled{1}$$

2 次方程式 $x^2 + bx + 2a = 0$ が $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ を 2 つの解にもつとき、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = -b, (\alpha + \beta)\alpha\beta = 2a$$

これに①を代入して

$$-a + b = -b \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$-ab = 2a \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ において、} a \neq 0 \text{ より} \quad b = -2$$

$$\textcircled{2} \text{ より} \quad a = 2b = 2 \cdot (-2) = -4$$

$$\text{よって} \quad a = -4, b = -2$$

10. a, b は実数の定数とする。3 次方程式 $x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x + b = 0$ の実数解が $x = 1$ だけであるとき、 a の値の範囲と b の値を求めよ。

$x = 1$ がこの方程式の解であるから

$$1^3 + (a-1) \cdot 1^2 + (1-a) \cdot 1 + b = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad b = -1$$

$b = -1$ を方程式に代入すると

$$x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x - 1 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2+ax+1)=0$$

この方程式の実数解が $x = 1$ だけであるのは、次の [1], [2] の場合である。

[1] 2 次方程式 $x^2 + ax + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$ が実数解をもたない場合

2 次方程式①の判別式を D とすると

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = (a+2)(a-2)$$

2 次方程式①が実数解をもたないのは

$$D < 0 \text{ のときである。}$$

$$\text{よって} \quad (a+2)(a-2) < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -2 < a < 2$$

[2] 2 次方程式①が $x = 1$ を重解にもつ場合 $x = 1$ が解であるから $1^2 + a \cdot 1 + 1 = 0$

$$\text{これを解くと} \quad a = -2$$

このとき、①は $x^2 - 2x + 1 = 0$ となり、重解 $x = 1$ をもつ。

[1], [2] より、求める a の値の範囲は

$$-2 \leq a < 2$$

$$\text{したがって} \quad -2 \leq a < 2, b = -1$$