2018-hi-exp-log-answer

2018-hi-exp-log-answer.tex　　3 年 ＿＿＿ コース　　名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 次の式を計算し，できるだけ簡単な形で表しなさい。

(1) $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1^3}=1$

(2) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(3) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{2}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^6}}=\sqrt[3\times 2]{2^6}=\sqrt[6]{2^6}=2$

(5) $5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{4}{3}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=5^{\frac{6}{3}}=5^2=25$

(6) $(4^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

(7) $8^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}\div 8^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$

(8) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^1=2$

2. 次の方程式を解け。

(1) $8^x=4$

方程式を変形すると $2^{3x}=2^2$

$3x=2$ から $x=\frac{2}{3}$

(2) $9^x=3^{x+1}$

方程式を変形すると $3^{2x}=3^{x+1}$

$2x=x+1$ から $x=1$

(3) $4^x-3\cdot 2^x-4=0$

方程式を変形すると $(2^x)^2-3\cdot 2^x-4=0$

$(2^x-4)(2^x+1)=0$

$2^x+1>0$ だから $2^x-4=0$

$2^x=2^2$ から $x=2$

3. 次の不方程式を解け。

(1) $2^x\geqq 8$

不等式を変形すると $2^x\geqq 2^3$

底 2 は 1 より大きいから $x\geqq 3$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{9}\right)^x$

不等式を変形すると

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから

$x+1>2x$

これを解いて $x<1$

4. 次の式を計算し，できるだけ簡単な形で表しなさい。

(1) $\log_5 125=\log_5 5^3=3$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-1$

(3) $\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

(4) $\log_{10} 2+\log_{10} 5=\log_{10}(2\times 5)=\log_{10} 10=1$

(5) $\log_2 24-\log_2 3=\log_2\frac{24}{3}$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

(6) $2\log_3 4+\log_3 5-\log_3 8$

$=\log_3 4^2+\log_3 5-\log_3 8$

$=\log_3\frac{16\times 5}{8}=\log_3 10$

(7) $\log_8 16=\frac{\log_2 16}{\log_2 8}=\frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3}=\frac{4}{3}$

(8) $\log_2 3\cdot\log_3 8=\log_2 3\times\frac{\log_2 8}{\log_2 3}$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

5. 次の方程式，不等式を解け。

(1) $log_2 x=3$

対数の定義から $x=2^3=8$

(2) $\log_2 x\leqq 3$

真数は正であるから　$x>0\cdots$①

不等式を変形すると　$\log_2 x\leqq\log_2 2^3$

すなわち　$\log_2 x\leqq\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x\leqq 8\cdots$②

①，②の共通範囲を求めて　$0<x\leqq 8$

(3) $\log_3 x+\log_3(x-8)=2$

真数は正であるから

$x>0$　かつ　$x-8>0$

すなわち　$x>8\cdots$①

方程式を変形すると

$\log_3 x(x-8)=2=\log_3 3^2$

よって　$x(x-8)=3^2$

式を整理すると

$x^2-8x-9=(x+1)(x-9)=0$

① より　$x=9$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$

真数は正であるから　$x-1>0$

すなわち　$x>1\cdots$①

不等式を変形すると

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^2$　すなわち　$x<\frac{5}{4}\cdots$②

①，②の共通範囲を求めて　$1<x<\frac{5}{4}$

(5) $\log_{0.5}(3-x)\geqq\log_{0.5} 2x$

真数は正であるから

$3-x>0$　かつ $2x>0$

すなわち　$0<x<3\cdots$①

底 0.5 は 1 より小さいから

$3-x \leqq 2x$　すなわち　$1 \leqq x \cdots$②

①，②の共通範囲を求めて　$1 \leqq x < 3$

6. $\log_{10} 1.62 = 0.2095$ として, 以下の値を求めよ。

(1) $\log_{10} 1620000 = \log_{10}(1.62 \times 10^6)$

$= \log_{10} 1.62 + \log_{10} 10^6$

$= 0.2095 + 6 = 6.2095$

(2) $\log_{10} 0.00162 = \log_{10}(1.62 \times 10^{-3})$

$= \log_{10} 1.62 + \log_{10} 10^{-3}$

$= 0.2095 - 3 = -2.7905$

7. 3^{20} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$\log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$

$9 < \log_{10} 3^{20} < 10$　であるから

$9 \log_{10} 10 < \log_{10} 3^{20} < 10 \log_{10} 10$

つまり　$10^9 < 3^{20} < 10^{10}$

よって，3^{20} は 10 桁の数である。

8. 2^n が 10 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

2^n が 10 桁の数となるのは，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ のときである。

常用対数をとると　$9 \leqq n \log_{10} 2 < 10$

$\log_{10} 2 = 0.3010 > 0$ であるから

$\dfrac{9}{\log_{10} 2} \leqq n < \dfrac{10}{\log_{10} 2} \cdots$①

$\dfrac{9}{0.3010} = 29.9\cdots$，$\dfrac{10}{0.3010} = 33.2\cdots$

よって，不等式①を満たす自然数 n は

$n = 30,\ 31,\ 32,\ 33$