平成２７年度　第２学期期末考査（数学 A）

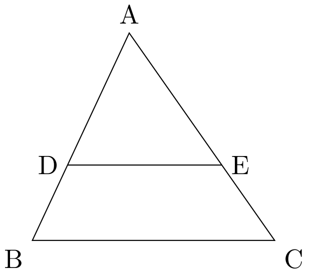
2015-hiA-2-2-test.tex　　１年 ______ コース　　名前 ________________________

問題１，３，５，７は普通に証明しなさい。

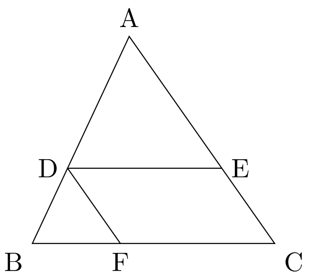
問題２，４，６，８，９，１０，１１は誤りがあれば，その箇所を訂正しなさい。なければ解答にまるをしなさい。

問題１２，１３は普通に解答しなさい。

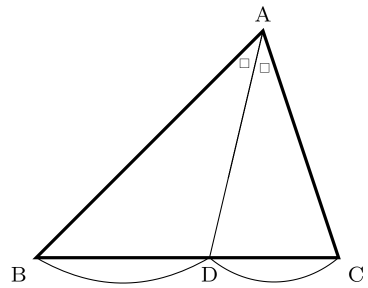
1. $\triangle ABC$ の辺 AB，AC 上の点をそれぞれ D，E とするとき
$DE /\!/ BC$ ならば $AD : DB = AE : EC$
となることを証明せよ。



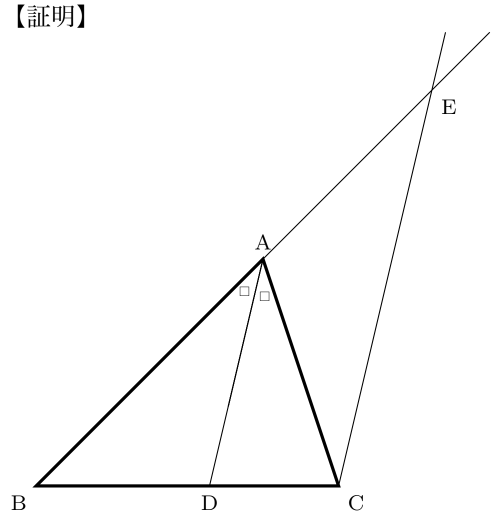
ヒント：点 D を通り線分 EC に平行な直線を引き，線分 BC との交点を F とする。($EC /\!/ DF$)



2. （三角形の角の二等分線と比）
$\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点は，辺 BC を $AB : AC$ に内分することを証明せよ。



【証明】

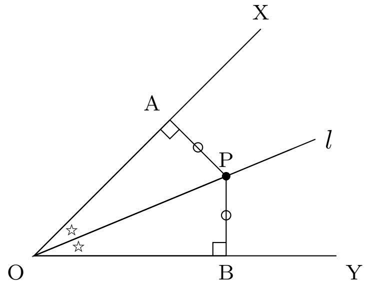


$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とすると
$\angle BAD = \angle DAC \cdots$①
頂点 C を通り直線 AD に平行な直線を引き，辺 AB の A を越える延長との交点を E とすると，$AD /\!/ EC$ から
$\angle BAD = \angle AEC \cdots$②
$\angle DAC = \angle ACE \cdots$③
①，②，③ から，$\triangle ACE$ において $\angle AEC = \angle ACE$ となるから
$AE = AC$
また，$AD /\!/ EC$ から $BD : DC = BA : AE$
したがって $BD : DC = AB : AC$
【終】

3. $\angle XOY$ の二等分線 l と点 P について，

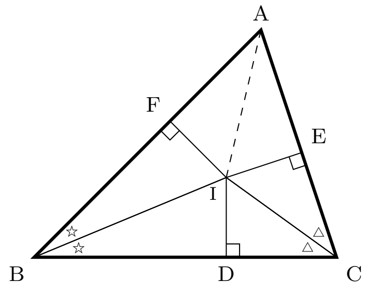
点 P が l 上にある $\Longleftrightarrow$ 点 P が２辺 OX，OY から，等距離にある

ことを証明せよ。



4. (三角形の内角の二等分線)

三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わることを証明せよ。



【証明】

$\triangle ABC$ において，$\angle B$ の二等分線と $\angle C$ の二等分線の交点を I とし，I から辺 BC,CA，AB に下ろした垂線を，それぞれ ID，IE，IF とすると $IF = ID$，$IE = ID$

$IF = IE$ となるから，I は $\angle A$ の二等分線上にもある。

よって，三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わる。

【終】

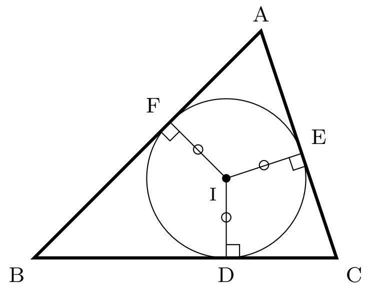
上の証明により，次のことがいえる。

$ID \perp BC$，$IE \perp CA$，$IF \perp AB$

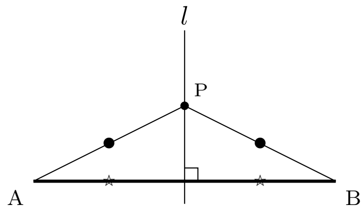
$ID = IE = IF$

よって，この点 I を中心とする半径 ID の円は，$\triangle ABC$ の３辺に接する。

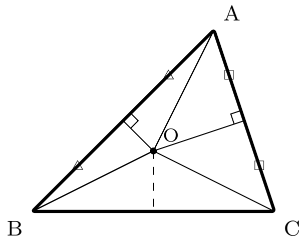
この円を $\triangle ABC$ の内接円といい，点 I を $\triangle ABC$ の内心いう。



5. 線分 AB の垂直二等分線 l と点 P について，
点 P が l 上にある。$\Longleftrightarrow PA=PB$
が成り立つことを証明せよ。

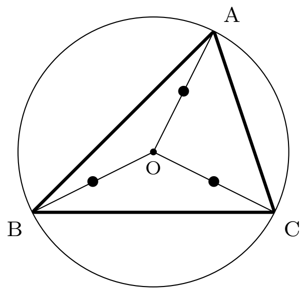


6. （三角形の辺の垂直二等分線）
三角形の３辺の垂直二等分線は１点で交わることを証明せよ。



【証明】
$\triangle ABC$ において，辺 AB の垂直二等分線と辺 AC の垂直二等分線の交点を O とすると
$OA=OB$，$OA=OC$
よって，$OB=OC$ となるから，O は辺 BC の垂直二等分線上にもある。
したがって，三角形の３辺の垂直二等分線は１点で交わる。
【終】

上の証明で示したように，$\triangle ABC$ において，３辺の垂直二等分線が交わる点を O とすると，点 O は $\triangle ABC$ の３つの頂点から等距離にある。よって，この点 O を中心とする半径 OA の円は，$\triangle ABC$ の３つの頂点を通る。
この円を $\triangle ABC$ の外接円といい，点 O を $\triangle ABC$ の外心という。

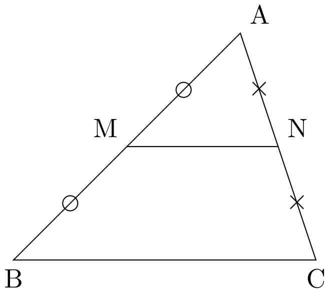


7. (中点連結定理)

$\triangle ABC$ において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とするとき，

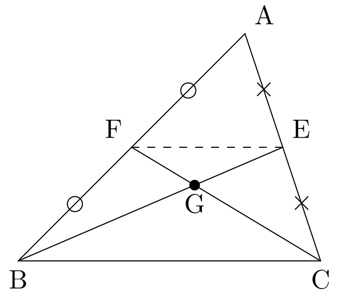
$MN \mathbin{/\!/} BC$，$MN = \dfrac{1}{2}BC$

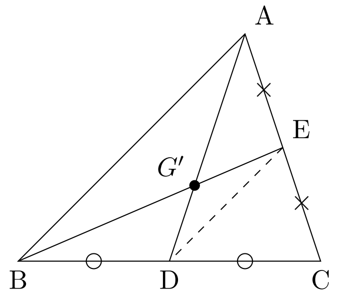
となることを証明せよ。



8. (三角形の中線)

三角形の３本の中線は１点で交わり，その点は各中線を $2:1$ に内分することを証明せよ。





【証明】

$\triangle ABC$ の中線 BE と中線 CF の交点を G とする。また，中線 AD と中線 BE の交点を G' とする。

このとき，まず，２点 G，G' が一致することを示す。

中点連結定理により

$FE \mathbin{/\!/} BC$，$BC : FE = 2:1$

となるから　$BG : GE = BC : FE = 2:1$

よって，点 G は線分 BE を $2:1$ に内分する。

同様にして　$BG' : G'E = AB : ED = 2:1$

よって，点 G' は線分 BE を $2:1$ に内分する。

線分 BE を $2:1$ に内分する点は１点だけであるから，２点 G，G' は一致する。

したがって，３本の中線は点 G で交わる。

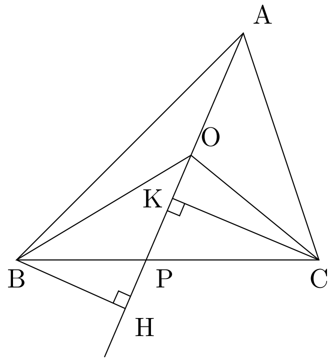
また，$AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2:1$ であるから，３本の中線が交わる点は各中線を $2:1$ に内分する。

【終】

9. 下の図において，

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCA} = \frac{BP}{PC}$$

が成り立つことを証明せよ。



【証明】

$\triangle OAB : \triangle OCA = BH : CK$

$BH \parallel CK$ であるから $BH : CK = BP : PC$

よって　$\triangle OAB : \triangle OCA = BP : PC$

すなわち　$\dfrac{\triangle OAB}{\triangle OCA} = \dfrac{BP}{PC}$

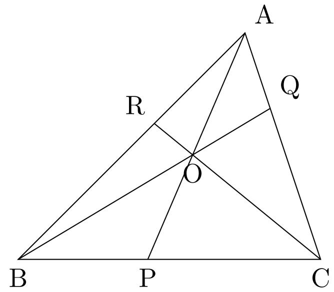
【終】

10. (チェバの定理)

$\triangle ABC$ の内部に点 O がある。頂点 A，B，C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

となることを証明せよ。



【証明】

$\triangle ABC$ において

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OCA}$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB}$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\triangle OCA}{\triangle OBC}$$

よって

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB}$$

$$= \frac{\triangle OAB}{\triangle OCA} \cdot \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB} \cdot \frac{\triangle OCA}{\triangle OBC} = 1$$

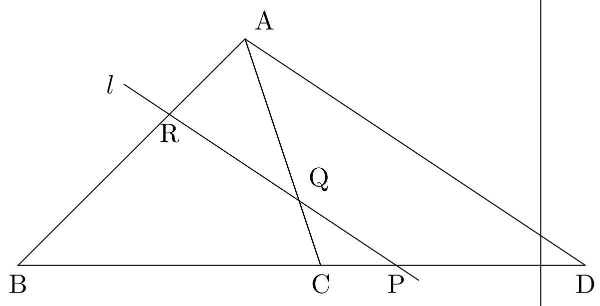
【終】

11. (メネラウスの定理)

$\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB またはその延長が，三角形の頂点を通らない直線 l と，それぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

となることを証明せよ。



【証明】

$\triangle ABC$ の頂点 A を通り，直線 l に平行な直線を引き，直線 BC との交点を D とする。

平行線と線分の比の関係から

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{CP}{PD},\quad \frac{AR}{RB}=\frac{DP}{PB}$$

よって

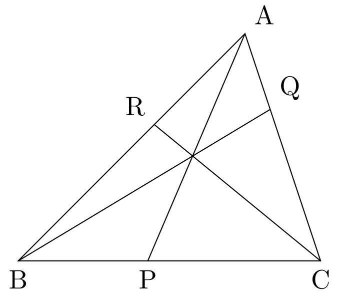
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DP}{PB}=1$$

【終】

12. $\triangle ABC$ において，

$CQ:QA=2:1$, $AR:RB=2:3$,

であるとき，$BP:PC$ を求めなさい。



13. $\triangle ABC$ において，

$AR:RB=2:3$, $BC:CP=2:1$, であるとき，$CQ:QA$ を求めなさい。