1. 1 辺の長さが 2 の正四面体 $ABCD$ において、辺 CD の中点を M とするとき、次のものを求めよ。

(1) $cos\angle ABM$ の値

$AM = BM = BC\sin 60^o = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

よって、$\triangle ABM$ において、余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} cos\angle ABM &= \frac{AB^2 + BM^2 - AM^2}{2 \times AB \times BM} \\ &= \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABM$ の面積 S

$\sin\angle ABM = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times AB \times BM \times \sin\angle ABM \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

(3) 正四面体の体積 V

三角錐 $ABCM$ の体積は底面積が S で、高さが $CM = 1$ となるから、

求める体積 V は

$V = 2 \times \dfrac{1}{3} \times S \times CM = 2 \times \dfrac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2. 1 辺の長さが 2 の正四面体 $ABCD$ に内接する球の中心を O とする。

(1) 四面体 $OBCD$ の体積 V を求めよ。

求める体積 V は前問で解いた体積の $\dfrac{1}{4}$ であるから

$V = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

(2) 球の半径 r を求めよ。

正四面体の側面である一つの正三角形の面積 S は

$S = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^o = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$V = \dfrac{1}{3}Sr$ であるから

$r = \dfrac{3V}{S} = \dfrac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

(3) 球の表面積と体積を求めよ。

表面積 $= 4\pi r^2 = \dfrac{2\pi}{3}$ 　　　　体積 $= \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{\sqrt{6}}{27}\pi$

3. 関数 $y = x^2 - 4x$ 　について以下の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq x \leqq 5$ の範囲でこのグラフをかけ。

(2) $a \leqq x \leqq a + 2$（a は定数）として、この関数の最大値、最小値を、次の場合について、それぞれ求めよ。

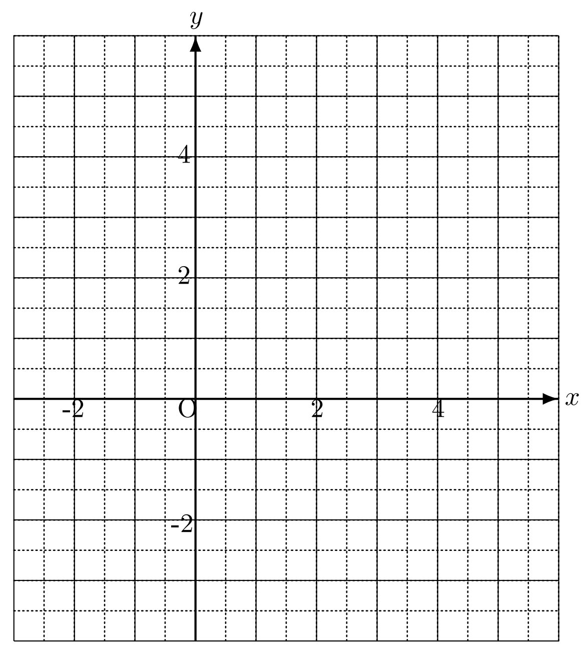
1) $a \leqq 0$

2) $0 < a < 1$

3) $a = 1$

4) $1 < a < 2$

5) $2 \leqq a$



4. 次の式を因数分解せよ。

(1) $2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$

(2) $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$